MSC 34M50

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ И ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОРЯДКА С ОПЕРАТОРОМ КОШИ-РИМАНА НА СВЕРХСИНГУЛЯРНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

А.Б. Расулов, М.А. Расулзода

Москва, Россия, e-mail: rasulov-abdu@rambler.ru

Аннотация. Рассматривается эллиптическое уравнение произвольного порядка на плоскости, определяемое оператором Коши-Римана, с особенностью высокого порядка в начале координат. Устанавливаются наличие решений и явные выражения.

Ключевые слова: оператор Коши-Римана, сверхсингулярное многообразие, интегральное представление, граничные задачи.

Пусть $G-$ односвязная конечная область, ограниченная кусочно-гладким замкнутым контуром $\partial G \in C^{1,\alpha}, 0 < \alpha < 1$, содержащая внутри точку$z = 0$.

В области G рассмотрим уравнения произвольного порядка с особенностью высокого порядка в начале координат

$$\prod_{j=1}^{m}\left(\partial_{\overline{z}} - A_j(z)\right)U + B(z)\overline{U} = F(z),\ \ A_j(z) = \frac{za_j(z)}{r^{n+1}}\ , \tag{1}$$

где $2\partial_{\overline{z}} = \partial_x + i\partial_y$ – оператор Коши-Римана, $n \geq 1$, $a_j(z)$, $j = \overline{1,m}$, $U(z)$ – искомая функция, $B(z), F(z)$ – фиксированные заданные функции.

Из уравнения (1) при $m = 1$ получим неоднородную систему Коши-Римана, которая в классе эллиптических систем первого порядка занимает особое место. Основополагающей работой в этом направлении является монография И.Н. Векуа [2]. Теория Векуа построена в предположении, что коэффициенты и правая часть принадлежат пространству $L^p(G), p > 2$. Поэтому даже уравнение с такими коэффициентами, как $A_1(z) = 1/z$, $B_1(z) = 1/\overline{z}$ не вписывается в эту теорию. Разработки по проблеме дифференциальных уравнений с сингулярными коэффициентами были начаты еще в 1957-1963 годах Л.Г. Михайловым, о чем можно судить по его монографии [4]. Исследованию задач для уравнений с коэффициентами, имеющими особенности в изолированной особой точке, посвящены работы З.Д. Усманова[7], Н.Р. Раджабова[5], А. Тунгатарова, А.Ю. Тимофеева, Г.Т. Макацария , М. Райссега и др. ученых. Впервые основательная работа по исследованию дифференциальных и интегральных уравнений с сверхсингулярными коэффициентами была проведена Н.Р. Раджабовым (см., например, [5]).

Из уравнения (1) при $m = 2$ получим уравнение второго порядка с оператором Коши-Римана и со сверхсингулярными коэффициентами. Классическим примером дифференциальных уравнений второго порядка (случай $m = 2$) с оператором $\partial_{\overline{z}}$ является уравнение $U_{\overline{z}^2} = 0$, для которого еще в 1948г. А.В. Бицадзе доказана некорректность постановки задачи Дирихле [1]. Существенный вклад в развитие таких и общих эллиптических систем с регулярными коэффициентами внес А.П. Солдатов (см., например, [6]). Модифицированное уравнение Бицадзе с добавленными младшими производными в случае регулярных коэффициентов было исследовано также Р.С. Саксом , Н.Е. Товмасяном и другими.

Объектом нашего исследования является уравнение произвольного порядка с оператором Коши-Римана в случае с сверхсингулярными коэффициентами, т.е. уравнение (1).

Под обобщенным решением мы понимаем функцию $U \in C(\overline{G}\backslash 0)$ непрерывно дифференцируемую по $\overline{z}$ до $m-1-$го порядка, а обобщенная производная $m-$го порядка по $\overline{z}$ принадлежит классу $L^p(G_\varepsilon)$ для любого $\varepsilon > 0$, где $G_\varepsilon = G \cap \{|z| > \varepsilon\}$.

Введем следующие обозначения:

$$(Tf)(z) = -\frac{1}{\pi}\int_G \frac{f(\zeta)d\xi d\eta}{\zeta - z}\,, \qquad A_j(z) = \frac{za_j(z)}{r^{n+1}}\,,$$
$$A_{j0}(z) = \frac{z}{r^{n+1}}[a_{j0}(z) - a_{j0}(0)]\,, \quad j = \overline{1,m}\,, \quad \omega(z) = \frac{2}{(n-1)r^{n-1}}\,. \tag{2}$$

Лемма 1. *Пусть $n > 1$ и, в обозначениях (2), функция $A_{j0} \in L^p(G)$, $p > 2$ так, что*

$$h_j(z) = (TA_{j0})(z) + \frac{a_j(0)}{(n-1)\pi i}\int_{\partial G}\frac{\zeta}{|\zeta|^{n+1}}\frac{d\zeta}{\zeta - z} \in H(\overline{G})\,.$$

Тогда при $n > 1$ сингулярный интеграл $(TA_j)(z)$ существует и представим в виде

$$(TA_j)(z) = -a_j(0)\omega(z) + h_j(z)\,. \tag{3}$$

Пусть при $n = 1$, в обозначениях (2), функция $A_{j0} \in L^p(G)$, $p > 2$ и круг $\{|z| \le \rho\}$ содержится в G так, что

$$h_j^0(z) = (TA_{j0})(z) + (TA_{j0}^0)(z) \in H(\overline{G})\,,$$

где

$$A_{j0}^0(z) = \begin{cases} 0, & |z| < \rho, \\ \overline{z}^{-1}, & |z| \ge \rho. \end{cases}$$

Тогда при $n = 1$ сингулярный интеграл $(TA_j)(z)$ существует и представим в виде

$$(TA_j)(z) = 2a_j(0)\ln\frac{|z|}{\rho} + h_j^0(z)\,.$$

Теорема 1. *Пусть $n > 1, m = 1, B(z) = 0$, $\forall z \in \overline{G}$ функция $A_{10} \in L^p(G)$, $p > 2$ и правая часть уравнения (1) удовлетворяет условию $e^{a_1(0)\omega(z)}F \in L^p(G)$. Тогда любое решение $U(z) \in C(\overline{G}\backslash 0)$ уравнения (1) представимо в виде*

$$U = e^{-a_1(0)\omega + h_1}[\phi_1 - T(e^{a_1(0)\omega - h_1}F)]\,, \tag{4}$$

где $\phi_1 \in C(\overline{G}\backslash 0)$ аналитична в области $G\backslash 0$.

Пусть $n > 1$. Если решение уравнения (1) имеет поведение

$$U(z) = O(1)e^{a_1(0)\omega} \quad \text{при} \quad z \to 0, \tag{5}$$

то по теореме 1 аналитическая в $G \setminus 0$ функция $\phi_1(z)$ ограничена в окрестности $z = 0$ и, следовательно, аналитична во всей области G. Этот факт ниже используем в постановке задачи Римана-Гильберта.

Задача типа Римана-Гильберта. Пусть $n > 1$. Задача Римана-Гильберта состоит в том, что требуется найти решение $U(z) \in C(\overline{G}\backslash 0)$ уравнения

$$\partial_{\bar{z}}U - A_1(z)U(z) = f(z)\,, \qquad A_1(z) = \frac{za_1(z)}{r^{n+1}}\,. \tag{6}$$

удовлетворяющее (5) и краевому условию

$$\mathrm{Re}\,[\lambda e^{i\mathrm{Im}a_1(0)\omega}U]_{\partial G} = g(t)\,, \tag{7}$$

где функция $\lambda(t) \in C(\partial G)$, $\lambda(t) \neq 0, t \in \partial G$.

Теорема 2. *Пусть $n > 1$, $m = 1$, $B(z) = 0$, $\forall z \in \overline{G}$, функция $A_0 \in L^p(G)$, $p > 2$, правая часть уравнения (1) удовлетворяет условию $e^{a_1(0)\omega}F \in L^p(G)$ и*

$$æ = -\frac{1}{\pi}\arg\lambda\big|_{\partial G}\,.$$

Тогда справедливы следующие утверждения.

1). *При $æ \geq 0$ однородное задача (6),(7) имеет $æ + 1$ линейно-независимых решений $U_1, ..., U_{æ+1} \in H_{loc}(G\backslash 0)$, а неоднородная задача всегда разрешима.*

2). *Если $æ < 0$, то однородная задача имеет только нулевое решение, а неоднородная разрешима при выполнении $-æ - 1$ условий разрешимости вида*

$$\int_{\partial G} g_0(e^{i\theta})e^{-ki\theta}d\theta = 0\,, \qquad (k = 1, ..., -æ - 1)\,.$$

Теорема 3. *Пусть $m = 2$, $n > 1$, $B(z) = 0$, $a_1(z) \neq a_2(z)$, $a_1(z) = r^n\varphi(z)$, $\forall z \in \overline{G}$, где аналитическая функция $\varphi(z) \in C(\overline{G})$. Кроме того,*

$$a_2(z) \in C^1(\overline{G}), \quad \mathrm{Re}\,a_2(0) > 0\,; \quad A_{02}(z), |z|^{-2n}f(z) \in L^p(G)\,,\; p > 2\,. \tag{8}$$

Тогда функции $K_0(z) = e^{-a_2(0)\omega + h_2(z) - (T(\varphi))(z)} \in C(\overline{G})$, и для любых функций $\phi_2 \in C(\overline{G}\backslash 0)$, $\phi_1 \in C(\overline{G})$, аналитических в области G формула

$$U(z) = e^{(T\varphi)(z)} \times$$

$$\Big[\phi_2(z) + T\big(K_0(\zeta)\phi_1(\zeta)\big)(z) + T\big((K_{a_2}(z) - K_{a_2}(t))f_0(t)\big)(z)\Big]\,, \tag{9}$$

определяет решение уравнения (1) из класса $C(\overline{G}\backslash 0)$, где

$$K_{a_2}(z) = T\big(K_0(\zeta)\big)(z)\,, \qquad f_0(z) = |z|^{-2n} e^{a_2(0)\omega(z)+h_2(z)} f(z)\,.$$

Поведение этих решений в окрестности начала координат описывает следующая

Теорема 4. *Пусть для уравнения (1) выполнены условия теоремы 3. Тогда поведение решений однородного уравнения (1) из класса $C(\overline{G}\backslash 0)$ в окрестности сверхсингулярной точки определяется формулой:*

$$U(z) = e^{(T\varphi)(z)}\left[\phi_2(z) - \frac{1}{\pi}\int_G \frac{K_0(\zeta)\phi_1(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta\right] =$$

$$= \left(R^2\frac{\varphi(z)-\varphi(0)}{z} + \overline{z}\varphi(z)\right)\phi_2(z) +$$

$$+\frac{\beta_0 E_0(a(0),n,0)}{(n-1)\pi i}\frac{1}{z} + \frac{1}{(n-1)\pi i}\Big(\phi_1(z) - \beta_0\Big)E_1(a(0),n,z)\,,$$

где

$$E_0(a(0),n,0) = \int_{R^{1-n}}^{\infty} e^{-c\eta}\eta^{-1-\frac{2}{n-1}}d\eta\,,$$

$$E_1(a(0),n,z) = \int_{R^{1-n}}^{\infty} e^{-c\eta}\eta^{-1-\frac{2}{n-1}}c_1(\eta,z)d\eta\,,$$

$$c_1(\eta,z) = \exp\Big\{\sum_{k\ge m\ge 1}\frac{a_{km}}{m+1}(\eta^{-\frac{2(m+1)}{n-1}-1})\,z^{k-m}\Big\}, \quad c = \frac{2a(0)}{(n-1)}\,.$$

Теорема 5. *Пусть в уравнении (1), функции*

$$a_j(z) \in C^m(\overline{G})\,, \qquad \mathrm{Re}\,a_j(0) \le 0\,, \qquad A_{j0}(z) \in L^p(G),\ p > 2,\ j = \overline{1,m},\ B(z) = 0$$

и правая часть $e^{-TA_1}F(z) \in L^p(G)$, $p > 2$. Тогда любое решение уравнения (1) из класса $(G\backslash 0)$ представимо в виде

$$U(z) = \prod_{j=0}^{m-1} S_k(U_{k+1})\,, \tag{10}$$

где

$$S_k(U_{k+1}) \equiv e^{TA_{m-k}(z)}\left(\phi_{m-k}(z) + \left(T(e^{-TA_{m-k}(\zeta))}U_{k+1}\right)(z)\right), \tag{11}$$

$k = 0,1,2...m-1$, где $U_0 \equiv U$, $U_m = F$, $\phi_{m-k}(z)$, $k = 0,1...m-1$ – произвольные аналитические функции комплексного переменного z, причем, если известно, U в G, то соответствующие аналитические функции $\phi_j(z), j = \overline{1,m}$ через значения функции $U(z)$ и ее производных до $m-1$-го порядка включительно, находятся единственным образом.

Замечание. Случай $B(z) \neq 0$ сводится к интегральному уравнению

$$U(z) = \prod_{j=0}^{m-1} S_k(U_{k+1}),$$

где: $B(z)$, $e^{-TA_1}r^{-n-1}f(z) \in L_p(G)$, $p > 2$, причем $U_m = B(z)\overline{U} + F$, которое решается методом последовательных приближений.

Аналогичные результаты получены для уравнения

$$\partial_{\bar{z}}U - A(z)U + B(z)U^m = 0, \quad A(z) = \frac{za_1(z)}{|z|^{n+1}}. \tag{12}$$

Теорема 6. *Пусть $n > 1$, $m > 0$, $B(z) \in L^p(G))$ и $\forall z \in \overline{G}$, функция $A_{10} \in L^p(G)$, $p > 2$, а также правая часть уравнения (1) удовлетворяет условию $e^{(m-1)a_1(0)\omega(z)}b \in L^p(G)$. Тогда любое решение $U(z) \in C(\overline{G}\backslash 0)$ уравнения (12) представимо в виде*

$$U = e^{-a_1(0)\omega+h_1}[\phi_1 + (m-1)T(e^{(m-1)(a_1(0)\omega-h_1)}b)]^{\frac{1}{m-1}}, \tag{13}$$

где $\phi_1 \in C(\overline{G}\backslash 0)$ аналитична в области $G\backslash 0$.

Задача типа Римана-Гильберта. *Пусть $n > 1$. Требуется найти решение $U(z) \in C(\overline{G}\backslash 0)$ уравнения (12) удовлетворяющее (5) и краевому условию*

$$\mathrm{Re}\,[\lambda e^{iIma_1(0)\omega}U^{m-1}]_{\partial G} = g(t), \tag{14}$$

где функция $\lambda(t) \in C(\partial G)$, $\lambda(t) \neq 0, t \in \partial G$.

Применяя к последней при $m = 1 - 1/k$, $k \in N$ классические результаты о разрешимости [3] сформулированной задачи, приходим к решению задачи Римана-Гильберта в классе однозначных аналитических функций.

Литература

1. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных / М.: Наука, 1981. – 448 с.
2. Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции / М.: Физматгиз, 1959. – 628 с.
3. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения / М.: Наука, 1968. – 512 с.
4. Михайлов Л.Г. Новые классы особых интегральных уравнений и их применение к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами / Душанбе: ТаджикНИИНТИ, 1963. – 184 с.
5. Раджабов Н.Р. Введение в теорию дифференциальных уравнений в частных производных со сверхсингулярными коэффициентами / Душанбе: Изд-во ТГУ, 1992. – 236 с.
6. Солдатов А.П. Эллиптические системы второго порядка в полуплоскости // Изв. РАН. – 2006. – .70,№6. – С.161-192.
7. Усманов З.Д. Обобщенные системы Коши-Римана с сингулярной точкой / Душанбе: Изд. АН Тадж. ССР, 1993. – 244с.
8. Расулов А.Б. Интегральные представления решений линейной эллиптической системы второго порядка с внутренней сверхсингулярной точкой // ДАН России. – 2009. – 429,№6. – С.735-737.

9. Расулов А.Б. Интегральные представления и граничные задачи для линейной эллиптической системы третьего порядка с внутренней сверхсингулярной точкой / Дифференциальные уравнения. Минск. – 2011. – 47, №2. – С.287-290.

INTEGRAL REPRESENTATIONS AND BOUNDARY PROBLEMS FOR THE EQUATION OF ARBITRARY ORDER WITH THE CAUCHY-RIEMANN OPERATOR ON SUPERSINGULAR MANIFOLDS

A.B. Rasulov, M.A. Rasulzoda

Moscow, Russia, e-mail: rasulov-abdu@rambler.ru

Abstract. Elliptic equation of arbitrary order on complex plane, defined by cauchy-Riemann's operator with the singularity of a high order at the origin is under consideration. It is found the solution existence and their explicit expressions.

Key words: Cauchy-Riemann's operator, supersingular manifolds, integral representation, boundary problems.